

## MAŠINSKI FAKULTET BEOGRAD

### Mašinski elementi-2

#### I-kolokvijum

#### 1. Osnovni principi transformacije mehaničke energije

Osnovna funkcija prenosnika je transformacija ulazne ugaone brzine izražene brojem obrtaja koji dolazi od motora  $n_{ul}$ , u izlazni broj obrtaja u jedinici vremena  $n_{izl}$  koji odgovara potrebama funkcionisanja radnog dela mašine. Odnos ovih brojeva obrtaja predstavlja *radni prenosni odnos* prenosnika.

$$i = \frac{n_{ul}}{n_{izl}} ; \quad \eta = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} = \frac{P_{ul} - P_g}{P_{ul}}$$

Usled međusobnog trenja delova prenosnika, deo mehaničke energije koja se prenosi, prelazi u toplotu. Stepenn iskorišćenja (efikasnost) prenosnika predstavlja odnos snage na izlazu  $P_{izl}$  i snaga na ulazu  $P_{ul}$ , gde je  $P_g$  - snaga gubitaka. Razlika između izlazne i ulazne snage (snaga gubitaka  $P_g$ ) kod većine mehaničkih prenosnika je mala, a stepenn iskorišćenja  $\eta$  je veliki tj. blizak je jedinici.

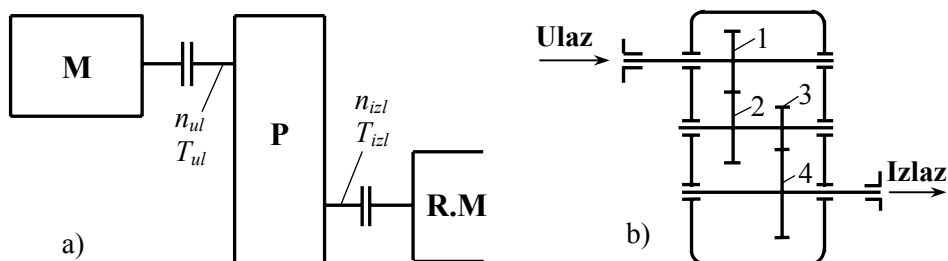
Odnos obrtnog momenta na izlazu iz prenosnika  $T_{izl}$  i obrtnog momenta na ulazu u prenosnik  $T_{ul}$  je

$$\frac{T_{izl}}{T_{ul}} = \frac{P_{izl}/\omega_{izl}}{P_{ul}/\omega_{ul}} = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} \frac{n_{ul}}{n_{izl}} = \eta i ; \quad T = \frac{P}{\omega} ; \quad \omega = \frac{\pi n}{30}$$

Sledi da je moment na izlazu iz prenosnika

$$T_{izl} = T_{ul} i \eta$$

što pokazuje da se sa povećavanjem radnog prenosnog odnosa  $i$  povećava obrtni moment na izlazu iz prenosnika. Smanjivanjem broja obrtaja (veće  $i$ ), povećava se obrtni moment  $T_{izl}$  tj. **sa istom snagom može se savladati veći radni otpor.**



$$i = \frac{n_{ul}}{n_{izl}} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4} = i_{1-2} i_{3-4} ; \quad i = \prod_{j=1}^k i_j$$

$i > 1$  - Reduktori

$i < 1$  - Multiplikatori

## 1. Frikcioni parovi. Radne karakteristike. Varijatori

Prenos obrtnog momenta i obrtnog kretanja ostvaruje se neposrednim dodirivanjem frikcionih površina. Na dodiru deluje pritiskujuća normalna sila  $F_n$  usled koje nastaje sila trenja do iznosa  $F_\mu = \mu F_n$ . Posredstvom ove sile prenosi se radno opterećenje izraženo tangentnom silom na dodiru

$$F_t = \frac{2T_1}{d_{w1}} = \frac{2T_2}{d_{w2}}$$

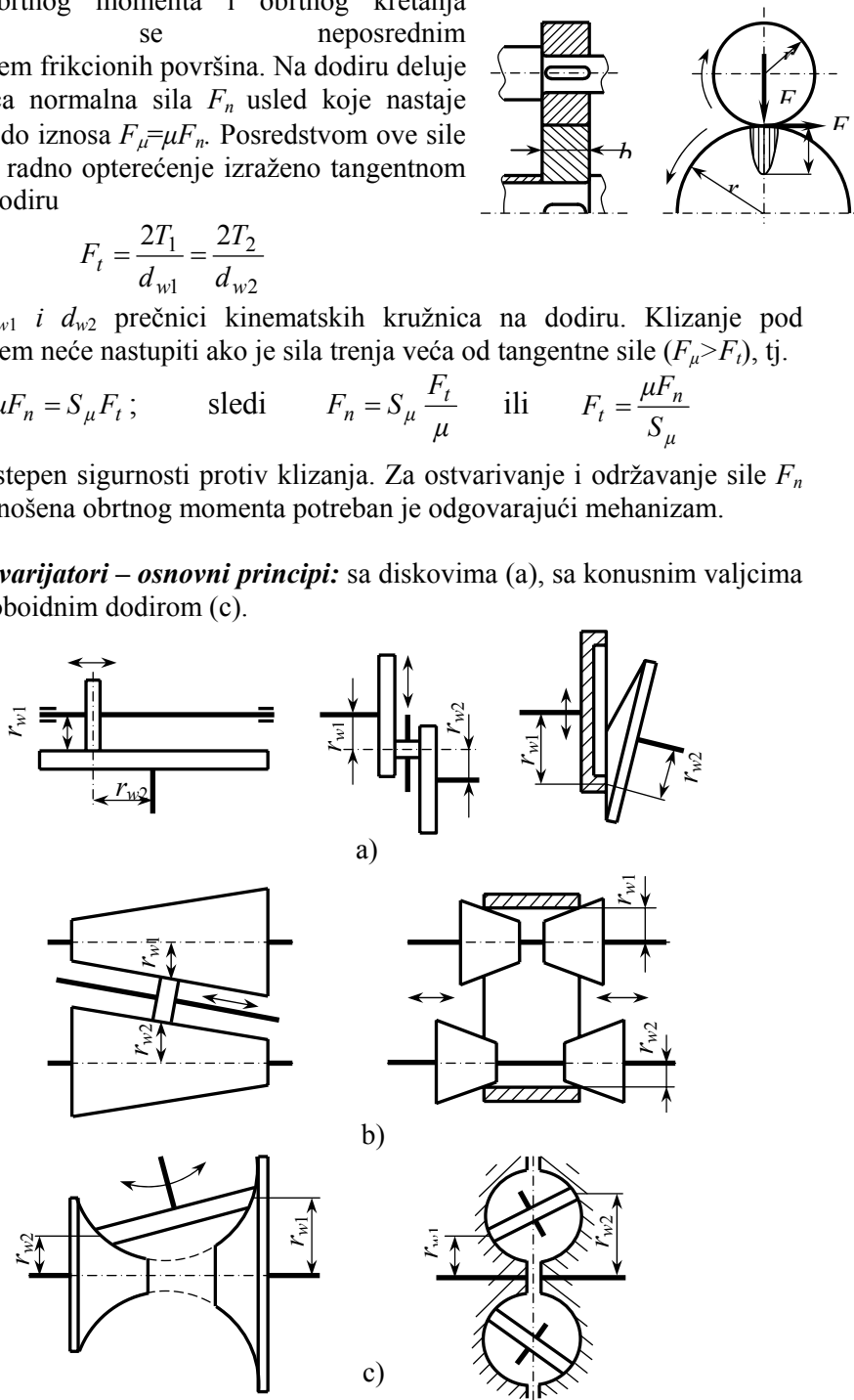
gde su  $d_{w1}$  i  $d_{w2}$  prečnici kinematskih kružnica na dodiru. Klizanje pod opterećenjem neće nastupiti ako je sila trenja veća od tangentne sile ( $F_\mu > F_t$ ), tj.

$$\mu F_n = S_\mu F_t; \quad \text{sledi} \quad F_n = S_\mu \frac{F_t}{\mu} \quad \text{ili} \quad F_t = \frac{\mu F_n}{S_\mu}$$

gde je  $S_\mu$  stepen sigurnosti protiv klizanja. Za ostvarivanje i održavanje sile  $F_n$  tokom prenošenja obrtnog momenta potreban je odgovarajući mehanizam.

**Frikcioni varijatori – osnovni principi:** sa diskovima (a), sa konusnim valjcima (b) i sa globoidnim dodirnim (c).

$$u = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$$



### 3. Elastično i kinematsko klizanje. Materijal

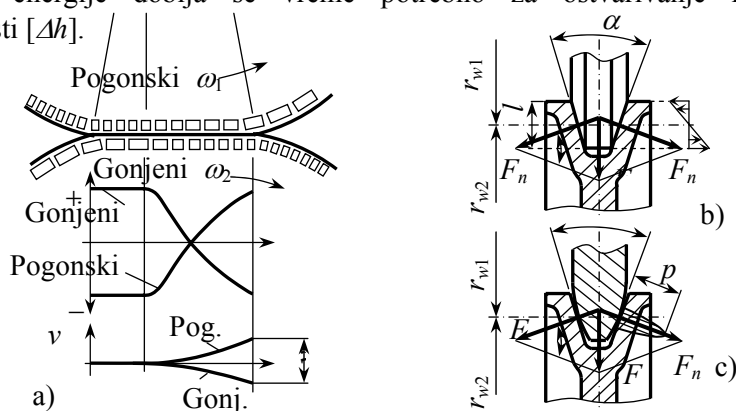
**Elastično klizanje** je posledica elastičnih deformacija na dodiru frikcionih površina (a). U odnosu na obimnu brzinu  $v$ , brzina klizanja se može izraziti faktorom proklizavanja  $f_k$  tj.  $v_k = f_k v$ . Proklizavanje dovodi i do povećanja kinematskog prenosnog odnosa,

$$u = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} \frac{1}{1 - f_k}; \quad r_{w2} = u r_{w1} (1 - f_k)$$

Snaga gubitaka usled ovog proklizavanja je  $P_\mu = F_\mu v_k = v F_n \mu f_k$ . Snaga gubitaka usled dejstva otpora kotrljanja  $P_f = v F_n f / r_w$ , gde je  $f$  koeficijent otpora kotrljanja. Ukupna snaga gubitaka i stepen iskorišćenja su

$$P_k = P_\mu + P_f = v F_n (\mu f_k + f / r_w); \quad \eta = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} = \frac{P - P_k}{P}; \quad L_h = \frac{[\Delta h] d_w \pi b W_\mu}{3600 P_k}$$

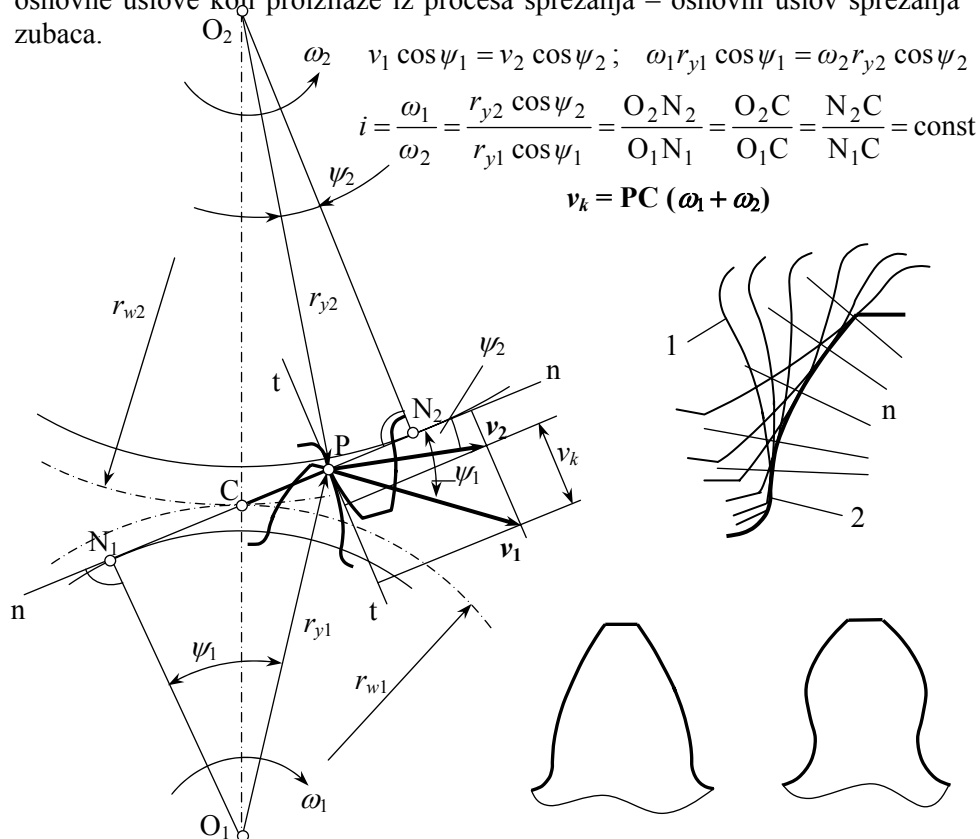
Snaga  $P_k$  istovremeno dovodi i do trošenja površinskog sloja materijala. Zapremona materijala koja se potroši jednaka je proizvodu debljine pohabanog sloja  $[\Delta h]$  i dodirne površine diska tj.  $V = [\Delta h] d_w \pi b$ . Energija potrebna za trošenje ovog materijala je  $V W_\mu$ , gde je  $W_\mu$  - jedinični rad trošenja tj. energija potrebna da se potroši jedinica zapremine materijala. U toku radnog veka  $L_h$  izraženog brojem sati rada, energija habanja je  $3600 L_h P_k$ . Izjednačavanjem dve navedene energije dobija se vreme potrebno za ostvarivanje kritične pohabanosti  $[\Delta h]$ .



**Materijali frikcionih parova** treba da su sa velikim modulom elastičnosti da bi elastične deformacije bile manje; Sa velikim koeficijentom trenja da bi sila pritiska na dodiru bila manja, i potrebna je što veća otpornost na habanje. Kod KČ/KČ, modul elastičnosti je veliki, a deformacije su male. Velika je i otpornost na habanje te je dopušten i relativno visok površinski pritisak. Koeficijent trenja je mali. Obloge su najčešće od gume, a mogu biti od plastike, presovane hartije i od drugih nemetalnih materijala. Guma se može nanositi lepljenjem ili vulkaniziranjem. Obloga omogućuje da se smanji potrebna sila pritiska na dodirnim površinama. Osim toga, smanjuje se klizanje i zagrevanje.

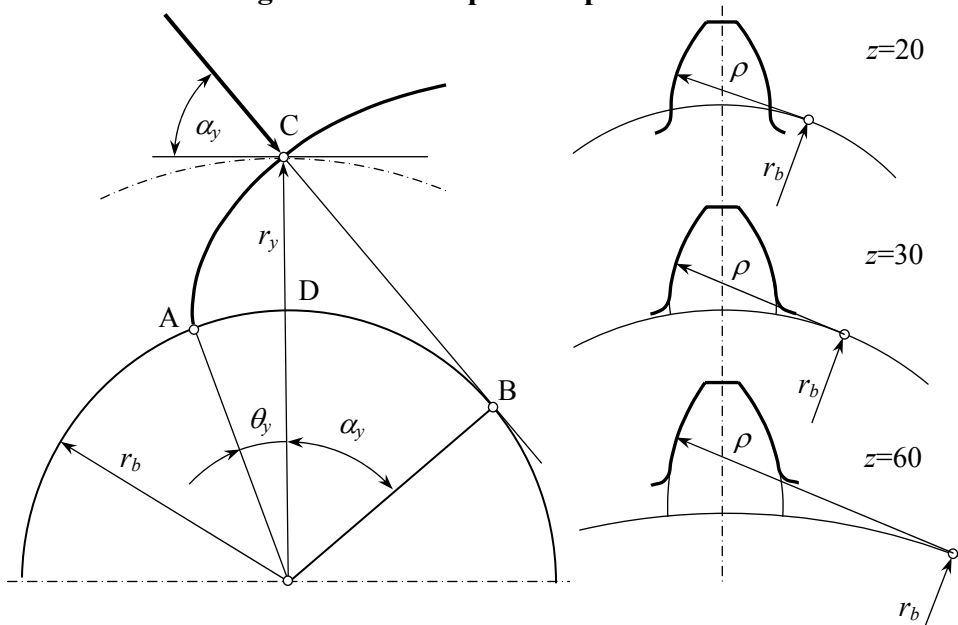
#### 4. Osnovno pravilo sprezanja zubaca

Dodir zubaca se ostvaruje po liniji koja predstavlja profil zupca. Oblik ovog profila treba da zadovolji dva osnovna uslova. Prvi je, da obezbedi kontinualnu rotaciju zupčanika bez ubrzavanja i usporavanja tokom rotacije. Da pri ulazenju zubaca u spregu (i pri izlasku iz sprege) nema "podrhtavanja" zupčanika. U matematičkom smislu to znači da prenosni odnos tokom sprezanja bude konstantan  $i = \omega_1 / \omega_2 = \text{const}$ . Drugi uslov koji treba da zadovolji oblik profila zupca je da se zupčanici sa tim profilom zubaca mogu proizvoditi na tehnološki produktivan način. Za ispunjenje prvog zahteva potrebno je najpre sagledati osnovne uslove koji proizilaze iz procesa sprezanja – osnovni uslov sprezanja zubaca.



Zajednička normala (n) u trenutnoj tački dodira zubaca P seče spojnu pravu centara obrtanja zupčanika  $O_1O_2$  u tački C koja predstavlja trenutni pol brzina. Da bi prenosni odnos bio konstantan zajednička normala ne sme se pomerati tj. ne sme menjati položaj koji je određen položajem trenutnog pola C. To dalje znači da tačka dodira zubaca može biti samo na pravoj  $N_1N_2$  koja je u isto vreme i normala (n).

## 5. Evolventa kruga. Standardni profil zupca

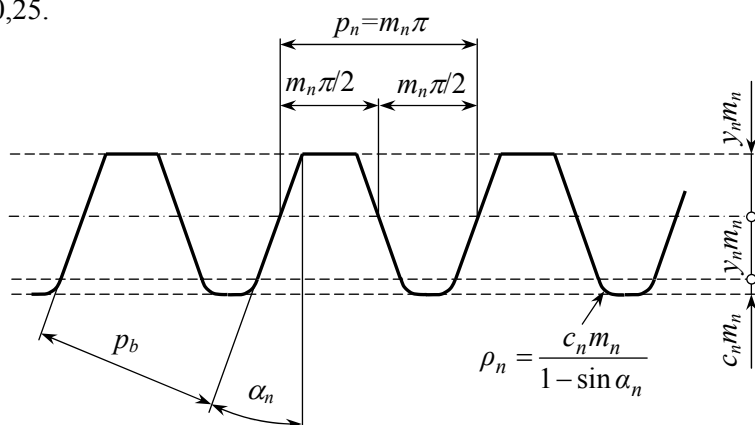


a)

**Evolutna kruga** je kriva linija koju opisuje tačka na pravoj koja se kotrlja po kružnici. Napadni ugao evolvente  $\alpha_y$  i evolventni ugao  $\theta_y$ , poluprečnika osnovne kružnice  $r_b$ .

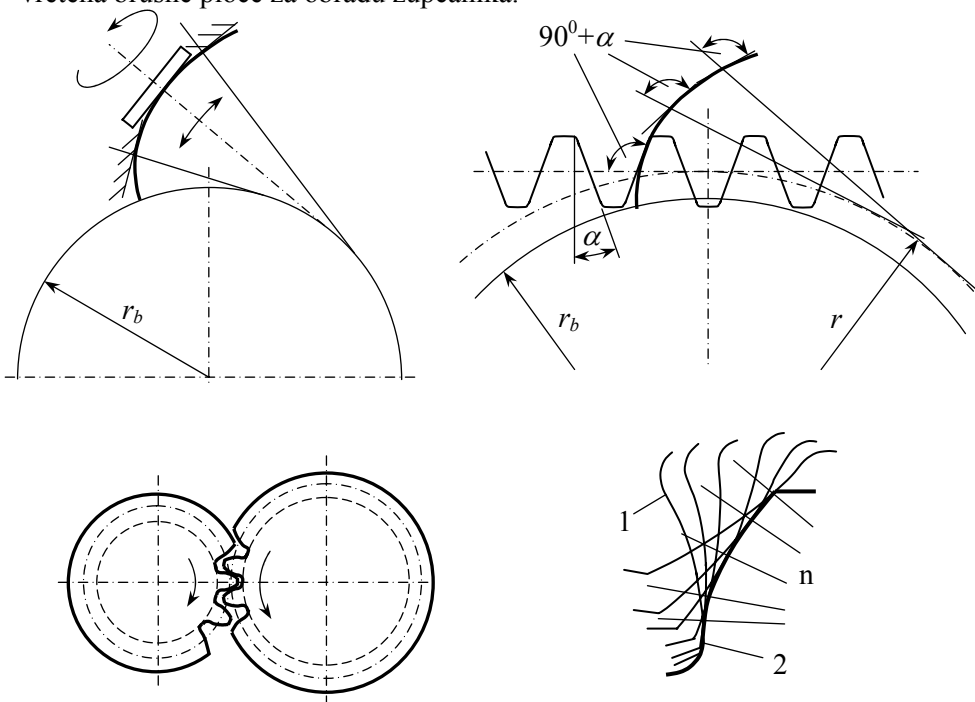
$$\cos \alpha_y = \frac{r_b}{r_v}; \theta_y = \frac{AD}{r_b} = \frac{AB - DB}{r_b} = \frac{r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha_y - r_b \alpha_y}{r_b}; \theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y$$

**Standardni profil** zupca evolventnih zupčanika je definisan za  $z=\infty$ . Standardni modul  $m_n$  je standardizovana vrednost od koje zavisi veličina zubaca. Koeficijent visine zupca je  $y_n=1$ , a ugao standardnog profila  $\alpha_n=20^\circ$ . Koeficijent visine zaobljenog dela standardnog profila je  $c_n=0,1...0,3$ , najčešće  $c_n=0,25$ .



## 6. Principi formiranja zupca evolventnih zupčanika – principi izrade

**Kotrljanje osnovne prave po osnovnoj kružnici** je princip koji se poklapa sa načinom formiranja evolvente kruga. Osnovna prava u fizičkom smislu je osa vretena brusne ploče za obradu zupčanika.

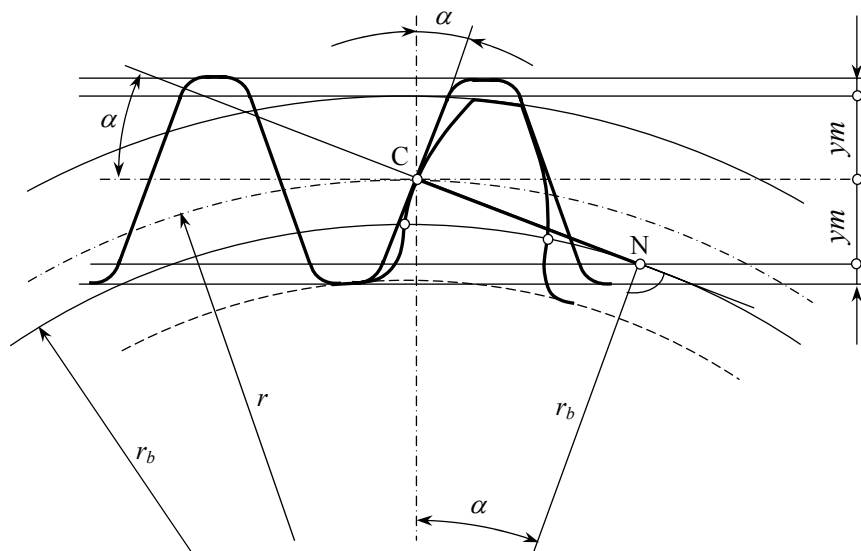


**Kotrljanje podeone prave po podeonoj kružnici** je prisutno kod sprežanja zupčanika i alata u obliku standardnog profila. Evolventa polazi od osnovne kružnice poluprečnika  $r_b = r \cos \alpha$ . Sečivo alata (bočna rezna ivica) tangira evolventu i stoji pod uglom  $90^\circ + \alpha$  u odnosu na podeonu pravu. Alat u obliku standardnog profila translatorno se kreće u pravcu upravnom na disk na kojem se režu zupci. Posle svakog prolaza alata (rezanja), zupčanik se zaokrene za mali ugao u odnosu na alat, ali tako da se ostvari i kotrljanje podeone prave po podeonoj kružnici (bez klizanja).

**Kotrljanje kinematskih kružnica** zupčanika i alata je princip zasnovan neposredno na osnovnom pravilu sprežanja zubaca. Alat je u obliku zupčanika sa oštrim ivicama za rezanje. Između alata i zupčanika se ostvaruje relativno kotrljanje kinematskih kružnica. Alat se još translatorno kreće u odnosu na zupčanik i ostvaruje rendisanje zubaca.

## 7. Granični broj zubaca i podsecanje profila zubaca

**Granični broj zubaca** zupčanika je onaj broj zubaca kod kojeg se prva tačka na aktivnom delu profila poklapa sa prvom tačkom evolvente.

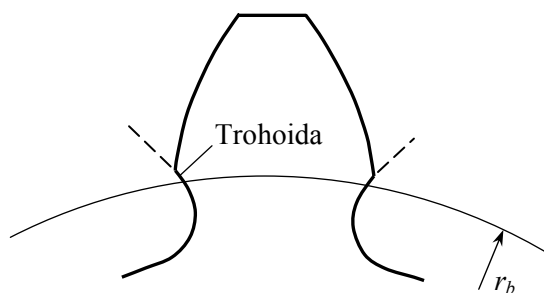


$$ym = r - r_b \cos \alpha; \quad r_b = r \cos \alpha; \quad ym = r - r \cos^2 \alpha; \quad r = \frac{mz}{2}$$

$$ym = \frac{mz}{2} (1 - \cos^2 \alpha); \quad z = z_g = \frac{2y}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2y}{\sin^2 \alpha}$$

Za  $y=1$  i za  $\alpha=20^\circ$  što odgovara pravozubim zupčanicima, granični broj zubaca je  $z_g=17,1$ , zaokruženo  $z_g=17$ . Za ovaj broj zubaca poklapa se prva tačka evolvente sa prvom tačkom aktivnog dela boka zupca. Time je do kraja iskorišćena evolventa.

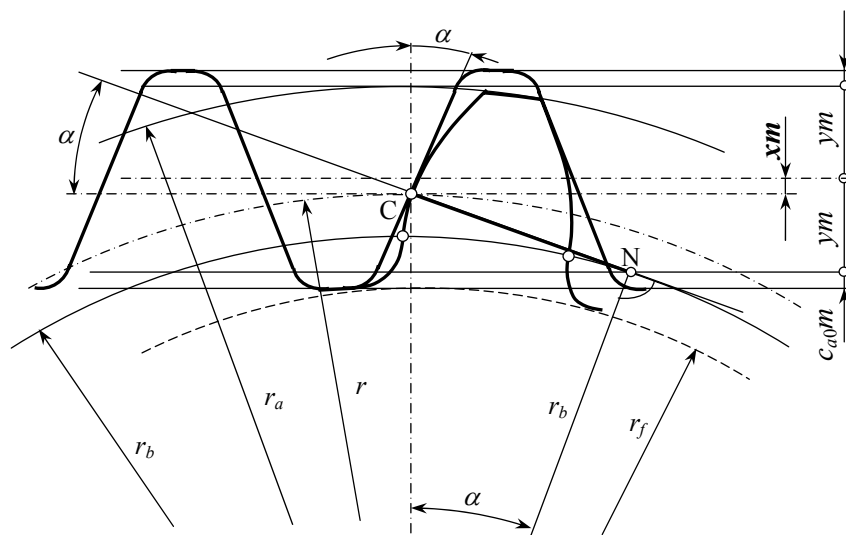
**Podsecanje zubaca** zupčanika je formiranje udubljenja u podnožju zupca zupčanika pri izradi relativnim kotrljanjem. Ako je broj zubaca manji od graničnog, profil alata zalazi ispod osnovne kružnice i preseca sebi putanju u vidu trohoida. To je kriva višeg reda koja nije prihvatljiva za profil boka zupca.



## 8. Pojam pomeranja profila zubaca. Kada se vrši pomeranje profila

**Minimalno pomeranje profila zubaca** je pozitivno pomeranje profila potrebno da se dovede do poklapanja prva tačka evolvente sa prvom tačkom aktivnog dela profila zupca.

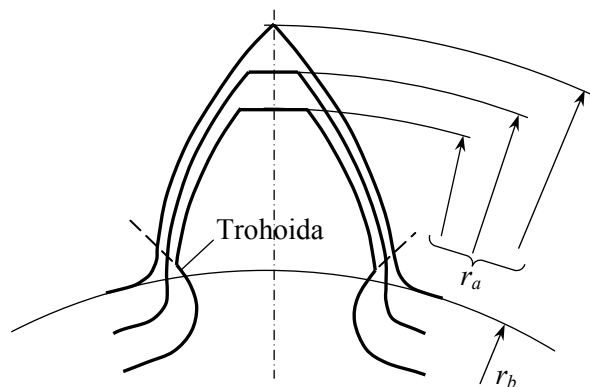
$$\begin{aligned} y_m &= r - r_b \cos \alpha + x_m \\ x_m &= y_m - (r - r_b \cos \alpha) = y_m - r(1 - \cos^2 \alpha); \\ r_b &= r \cos \alpha; \quad r = mz/2; \\ x &= x_{\min} = y - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$



Granično sprezanje alata sa pomeranjem profila

Pomera se profil zupca duž evolvente. Pozitivnim pomeranjem profil zupca se podiže u više predele evolvente i povećava radijus krivine boka zupca. Negativnim pomeranjem profil se spušta niz evolventu i smanjuje se radijus krivine boka zupca. Pomeranjem profila se menja i debljina zupca. Zupci su veće debljine sa pozitivnim pomeranjem. Menja se i prečnik zupčanika. Prečnik je veći pri pozitivnom pomeranju profila i obrnuto. Postižu se sledeći efekti: 1) otklanja se podsecanje profila zubaca kada je broj zubaca  $z < 17$ ; 2) smanjuje se napon na bokovima i u podnožju zubaca kada je broj zubaca  $z < 30$  i 3) fino se podešava prečnik i osno rastojanje zupčanika. Uglavnom se koriste pozitivna pomeranja profila osim izuzetaka kada su potrebna manja smanjenja prečnika. U tom slučaju se broj zubaca zupčanika mora biti dovoljno veliki da ne dovede do smanjenja radijusa krivine boka ispod prihvatljivih granica.

## 9. Granični profili evolventnih zupčanika



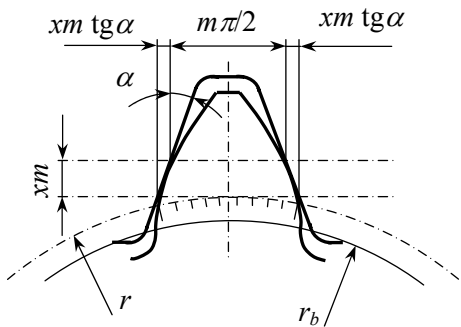
*Granični profili evolvente*

**Granični profili** evolvente su donja i gornja granica nedopustivog oblika profila. Donju granicu predstavlja oblik podsečenog profila koji nastaje kada je broj zuba manji od 17, a pomeranje profila je jednako nuli. Ovaj granični slučaj može nastati i pri  $z > 17$  uz negativno pomeranje profila. Gornju granicu predstavlja šiljasti zubac (debljina zuba na temenu jednaka nuli). On nastaje pri vrlo velikom pomeranju profila alata. Nije dopušten jer oštra ivica se ubrzano haba i nepovoljno deluje na bok drugog zupčanika u sprezi. Minimalna debljina na temenu je  $0,2m_n$ . Oblik profila treba da je između ovih granica. Na slici je prikazana varijacija oblika zavisno od pomeranja profila alata i od broja zuba zupčanika koji predstavljaju parametre oblika profila. Standardima su propisane granice područja varijacije pomeranja profila alata u zavisnosti od broja zuba zupčanika.

Pomera se profil zupca duž evolvente. Pozitivnim pomeranjem profil zupca se podiže u više predele evolvente i povećava radijus krivine boka zupca. Negativnim pomeranjem profil se spušta niz evolventu i smanjuje se radijus krivine boka zupca. Pomeranjem profila se menja i debljina zupca. Zupci su veće debljine sa pozitivnim pomeranjem. Menja se i prečnik zupčanika. Prečnik je veći pri pozitivnom pomeranju profila i obrnuto.

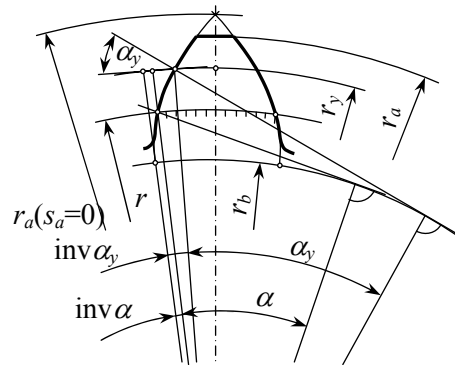
## 10. Lučna debljina zupca. Mera preko zubaca

Lučna debljina zupca na podeonoj kružnici dobija se na osnovu sprege zupčanika sa alatom. Dužina luka je jednaka širini medjuzublja tj.



Lučna debljina zupca na podeonoj kružnici

$$s = m \left( \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha \right) \quad s_y = 2r_y \left( \frac{s}{2r} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_y \right) = d_y \left( \frac{s}{d} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_y \right)$$

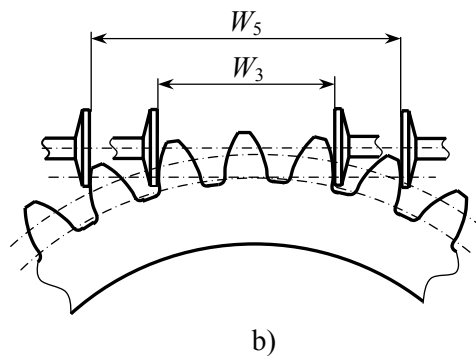
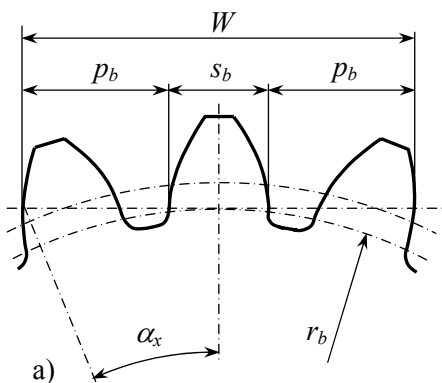


**Mera preko zubaca** omogućuje posrednu kontrolu koraka na osnovnoj kružnici  $p_b$  i debljine zupca  $s_b$ . Pojedinačno merenje ovih veličina teško se ostvaruje s obzirom da je onemogućen obuhvat pipcima mernog instrumenta. Mera preko zubaca se dobija obuhvatom preko levog i desnog boka. Merenje se vrši u pravcu koji tangira osnovnu kružnicu. Ugaono odstupanje ovog pravca ne odražava se na rezultat merenja, jer se kotrljanjem po osnovnoj kružnici prati oblik evolvente. Mera preko zubaca je kumulativna i sastoji se od  $(z_w - 1)$  osnovna koraka i jedne lučne debljine zupca na osnovnoj kružnici

$$W = (z_w - 1)p_b + s_b$$

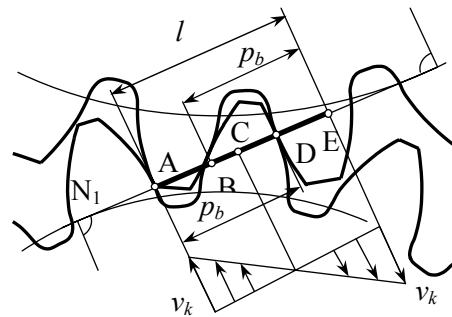
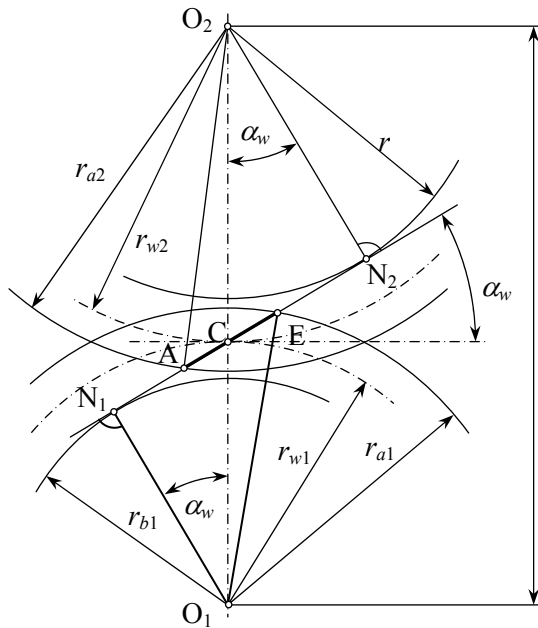
$$p_b = p \cos \alpha; \quad p = m\pi; \quad s_b = d_b \left( \frac{s}{d} + \operatorname{inv} \alpha \right); \quad d = mz; \quad s = \left( \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha \right) m$$

$$W = m \cos \alpha [\pi(z_w - 0,5) + z \operatorname{inv} \alpha + 2x \operatorname{tg} \alpha]$$



## 11. Sprezanje zupčanika. Dodirnica, ugao dodirnice, klizanje zubaca

**Dodirnica** je geometrijsko mesto tačaka dodira profila zubaca u odnosu na nepomičnu ravan. To je kod evolventnih zupčanika prava linija koja se poklapa sa pravom  $N_1N_2$  i po kojoj se kreće tačka dodira. Ugao dodirnice  $\alpha_w$  je ugao koji dodirnica zaklapa sa zajedničkom tangentom na kinematske kružnice poluprečnika  $r_{w1}$  i  $r_{w2}$ , a koje prolaze kroz tačku C. Veličina ovoga ugla se određuje polazeći od toga da je korak na kinematskim kružnicama jednak zbiru debljina zubaca na ovim kružnicama



$$v_k = PC (\omega_1 + \omega_2)$$

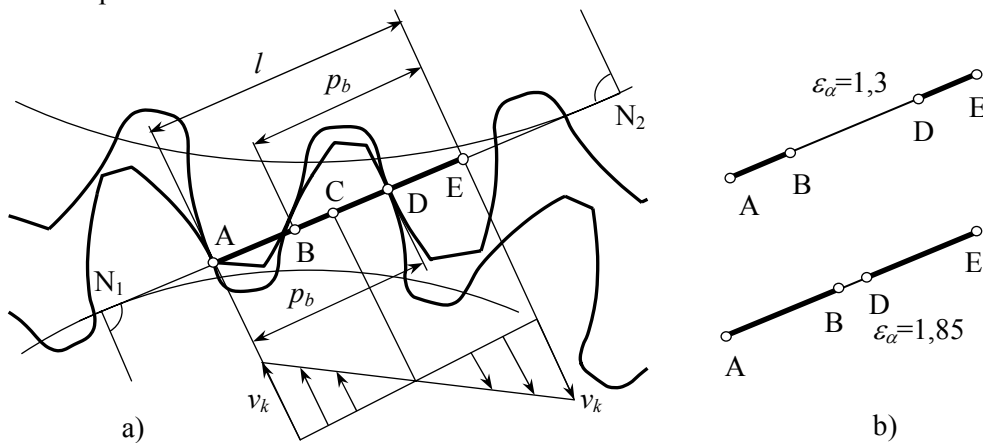
$$\text{inv } \alpha_w = \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} 2 \text{tg } \alpha + \text{inv } \alpha$$

Ako je zbir pomeranja profila  $x_1+x_2=0$ , ugao dodirnice  $\alpha_w=\alpha$ , za  $x_1+x_2>0$ ,  $\alpha_w>\alpha$  i obrnuto. Ako je ugao  $\alpha_n=20^\circ$ , ugao dodirnice može biti  $20^\circ$  ili varirati nekoliko stepeni u odnosu na  $20^\circ$ .

Aktivna dužina dodirnice je deo dodirne linije na kojem se dodiruju zupci zupčanika. Počinje u tački A koja predstavlja prvu tačku dodira zubaca i završava se u tački E gde se zupci razdvajaju. Te granice se dobijaju presecanjem dodirnice i temenih kružnica zupčanika poluprečnika  $r_{a1}$  i  $r_{a2}$ . Tačka dodira se kreće duž dodirnice od tačke A do tačke E i istovremeno duž profila zupca. Klizanje je srazmerno rastojanju tačke dodira od tačke C i zbiru ugaonih brzina zupčanika (osnovno pravilo sprežanja). Najveće brzina klizanja je u najudaljenijim tačkama, A i E, a u tački C, klizanja nema.

## 12. Stepen sprezanja profila i bočnih linija zubaca

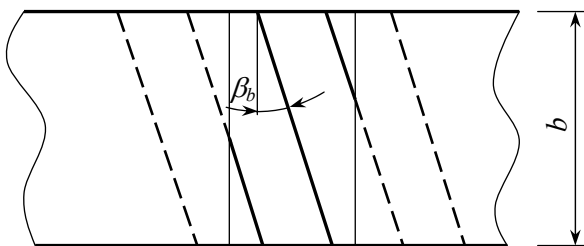
U trenutku kada u tački A počinje dodir, u tački D se već nalazi jedan par zubaca u dodiru. Ove dve tačke (A i D) su na rastojanju koje odgovara osnovnom koraku  $p_b$ . Između tačaka B i D tj. na duži BD ostvaruje jednoparna sprega, a na dužima AB i DE dvoparna sprega. U sprezi su naizmenično jedan i dva para zubaca.



Stepen sprezanja profila zubaca spregnutih zupčanika pokazuje odnos učešća jednoparne i dvoparne sprege zubaca. Izražava se odnosom aktivne dužine dodirnice  $l$  i osnovnog koraka  $p_b$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{l}{p_b} = \frac{l}{m\pi \cos \alpha} \quad \varepsilon_\alpha = 1 \dots 2 \quad (1,3 \dots 1,85)$$

Pokazuje odnos učešća dvoparne i jednoparne sprege. Većem stepenu sprezanja odgovara veće učešće dvoparne sprege. Stepenu sprezanja je veći za veći zbir zubaca zupčanika i za manje pomeranje profila.



$$\varepsilon_\beta = \frac{b \operatorname{tg} \beta_b}{p_b}$$

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

### 13. Dimenzije zupčanika: osno rastojanje, prečnici podeonih, kinematskih, podnožnih i temenih kružnica

**Oso rastojanje** zupčanog para je određeno dodirom evolventnih profila bokova zubaca tj. dodirom kinematskih kružnica koje se međusobno kotrljaju

$$a = r_{w1} + r_{w2}; \quad a = m \frac{z_1 + z_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$

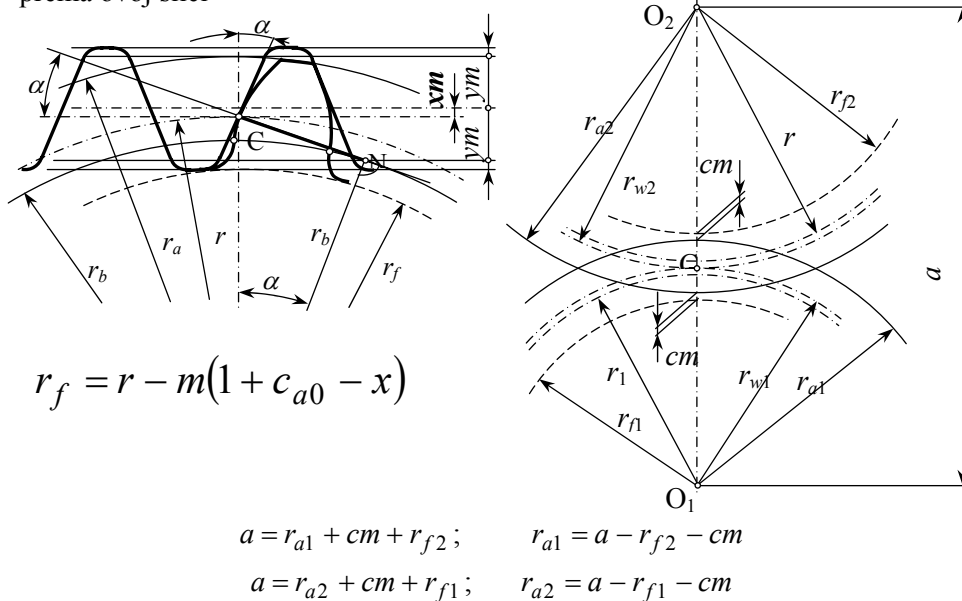
Za  $x_1 + x_2 > 0$ , povećava se ugao dodirnice  $\alpha_w$ , prečnici i osno rastojanje. **Prečnici**

**kinematskih kružnica** su  $r_{w1} = \frac{a}{u+1}$ ;  $r_{w2} = ur_{w1}$

**Prečnici podeonih kružnica** određeni su proizvodom modula i broja zubaca

$$d_1 = mz_1; \quad d_2 = mz_2; \quad r_1 = \frac{mz_1}{2}; \quad r_2 = \frac{mz_2}{2}; \quad u = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

**Prečnici podnožnih kružnica** su određeni spregom alata za izradu zupčanika i samog zupčanika pri njegovoj izradi. Podnožna površina ne stupa u dodir tokom sprezanja zubaca. Prilikom izrade, glava alata (produženi deo alata) visine  $c_{a0}m$  (slika 8.16) preseca medjuzublje do podnožnog cilindra poluprečnika  $r_f$  te je prema ovoj slici

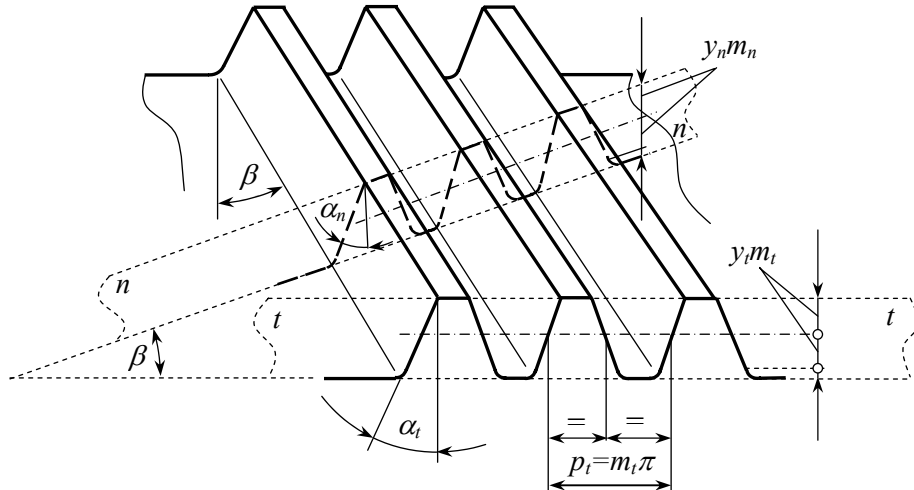


Koeficijent visine glave alata  $c_{a0}=0,1...0,3$  (najčešće 0,25).

Koeficijent temenog zazora je obično  $c=0,2$ .

## 14. Parametri kosih zubaca u čeonj i u normalnoj ravni

Profil u normalnoj ravni (n) je upravan na pravac zupca, profil u čeonj ravni (t) je upravan na osu zupčanika. Pri izradi zupčanika alat se kreće u pravcu zubaca i leži u ravani – n tj. "preslikava" standardni profil.



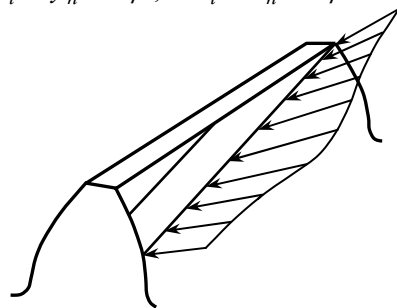
U normalnoj ravni (n) parametri profila zubaca su standardne vrednosti  $m_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $y_n$  i dr. U čeonj ravni (t) dobijaju se parametri proporcionalno veličini ugla  $\beta$ .

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}; \quad p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \frac{m_n \pi}{\cos \beta} = m_t \pi; \quad m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

U čeonj ravni u odnosu na normalnu ravan povećani su napadni ugao  $\alpha_t$ , modul  $m_t$  i korak  $p_t$ . Visina zubaca u ove dve ravni mora biti ista pšto je visina zubaca alata ista bez obzira na pravac njegovog kretanja pri rezanju. To znači da mora biti zadovoljen uslov

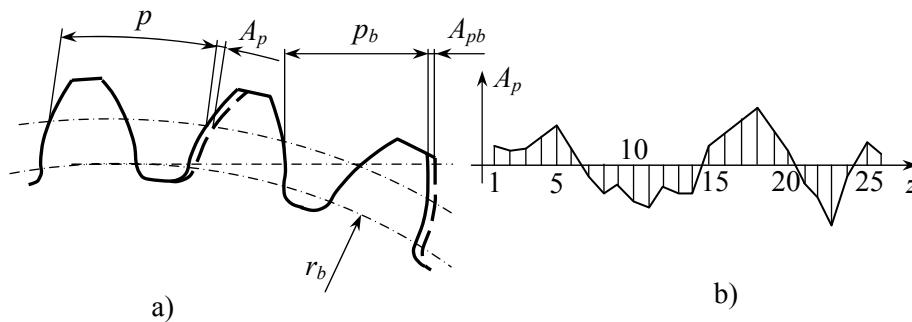
$$2y_n m_n = 2y_t m_t = 2y_t \frac{m_n}{\cos \beta}; \quad y_t = y_n \cos \beta; \quad x_t = x_n \cos \beta$$

**Kosi zubac** je zavojnog – helikoidnog oblika. Prava koja opisuje površinu stoji koso u odnosu na visinu tako formiranog zupca. Ova prava predstavlja dodirnu liniju zubaca spregnutih kosozubih (helikoidnih) zupčanika.

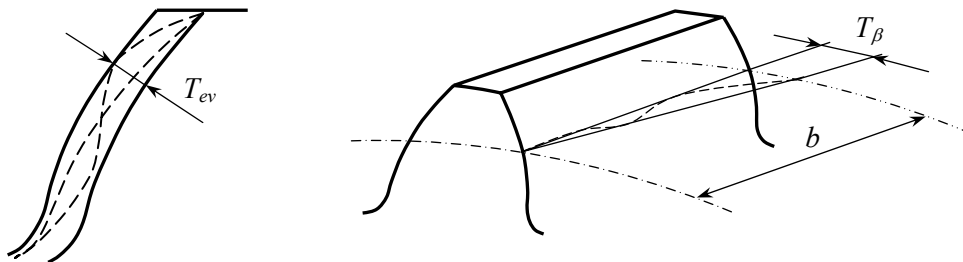


## 15. Tolerancije zupčanika

**Tolerancije koraka** zupčanika propisuju se za podeoni korak  $p$  i za osnovni korak  $p_b$ , posebno.

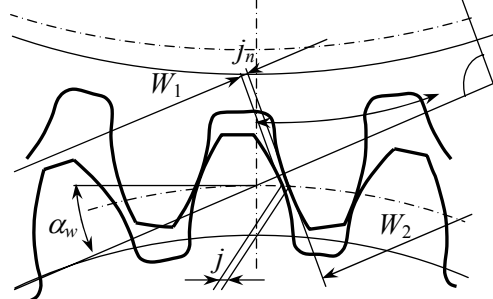


**Tolerancija evolvente**  $T_{ev}$  je rastojanje izmedju dve zamišljene evolvente teorijski tačnog oblika izmedju kojih treba da se nalazi profil boka zupca. **Tolerancija pravca bočne linije** zupca  $T_\beta$ , predstavlja toleranciju oblika duž zupca. Zavisí od stepena tolerancije i od širine zupčanika  $b$ . **Tolerancija radijalnog bacanja**  $T_r$  zupčanog venca u odnosu na otvor u glavčini zupčanika, propisuje se u zavisnosti od stepena tolerancije, modula i prečnika zupčanika.



Veličina **bočnog zazora** zavisí od odstupanja osnovog rastojanja i od odstupanja debljine zupca. Povećavanjem osnovog rastojanja povećava se zazor izmedju zubaca  $j_n$  i obrnuto. Pri datom osnovnom koraku  $p_b$ , mera preko zubaca se može smanjiti smanjivanjem debljine zupca. Odstupanje mere preko zubaca  $A_w$  mora biti negativno kako bi zazor  $j$  bio pozitivan. U obrazcu znak "minus" menja negativnu vrednost  $A_w$  u pozitivnu.

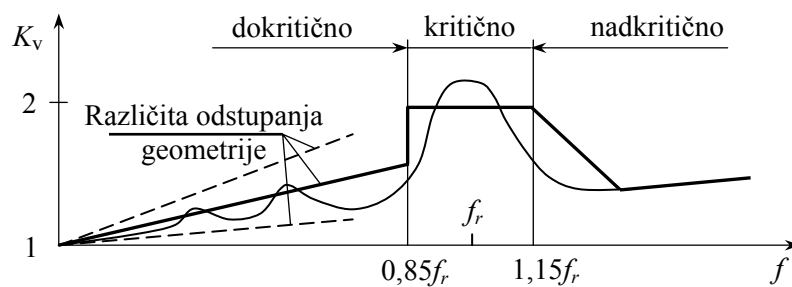
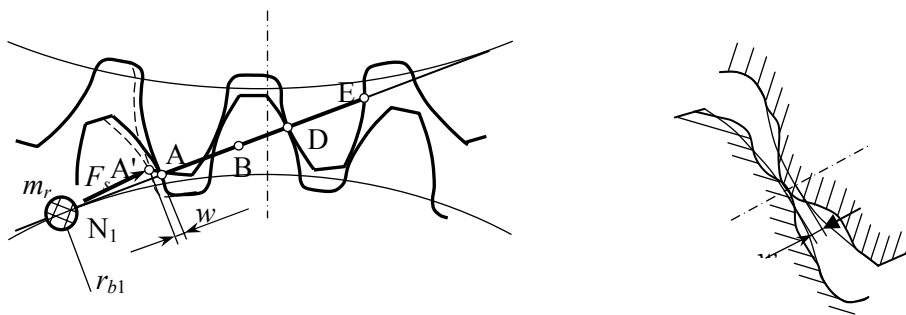
$$j = \frac{-(A_{w1} + A_{w2})}{\cos \alpha_{wt} \cos \beta} + 2A_a \tan \alpha_n$$



## 16. Spoljašnje i unutrašnje dinamičke sile u sprezi zubaca zupčanika

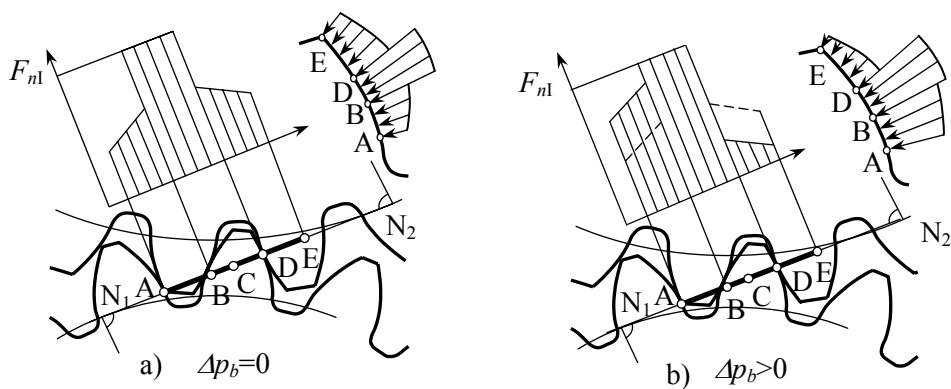
Polazna je tangentna sila na podeonoj kružnici  $F_t = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2}$

Do povećanja dovode spoljni uticaji kao i unutrašnji uticaji u samoj sprezi zubaca. Spoljni uticaji se obuhvataju faktorom spoljnjih dinamičkih sila (pogonski faktor)  $K_A$ , a unutrašnji faktorom unutrašnjih dinamičkih sila (dinamički faktor)  $K_v$ , pa je ukupno opterećenje zubaca  $K_A K_v F_t$ . **Pogonski faktor** (faktor spoljnjih dinamičkih sila)  $K_A$  obuhvata uticaj neravnomernosti radne i pogonske mašine. **Dinamički faktor** (faktor unutrašnjih dinamičkih sila)  $K_v$  obuhvata uticaj odstupanja procesa sprežanja zubaca od teorijskog usled kojeg nastaju dodatne (unutrašnje) dinamičke sile kao što su inercijalne sile i sile sudara zubaca. Odstupanje procesa sprežanja zubaca je posledica elastičnih deformacija zubaca i posledica odstupanja geometrije ozubljenja nastalih pri izradi i habanju tokom rada zupčanika. Pod opterećenjem zupci se elastično deformišu tako da gonjeni zupčanik zaostaje u odnosu na tačan položaj za veličinu ove elastične deformacije  $w$  odnosno za ugao  $\delta$ .



## 17. Raspodela opterećenja na parove zubaca u sprezi

**Raspodela opterećenja na parove zubaca u sprezi** ostvaruje se srazmerno krutostima zubaca u trenutnoj tački dodira. Ako je krutost prvog para zubaca  $c_I$ , a drugog  $c_{II}$  koeficijenti raspodele sile su  $\xi_I = c_I / (c_I + c_{II})$  i  $\xi_{II} = c_{II} / (c_I + c_{II})$ , tj. ukupna normalna sila u sprezi  $F_n = \xi_I F_n + \xi_{II} F_n$ . Tokom sprežanja tačke dodira se pomeraju, menjaju se krutosti i veličine sile na jednom paru zubaca. Za zupčane parove bez odstupanja geometrije koeficijenti raspodele sile  $\xi_I$  i  $\xi_{II}$ , menjaju se u granicama 0,4-0,6 s tim što je njihov zbir uvek jednak jedinici. Na dodiru AB i DE normalna sila se raspodeljuje na dva spregnuta para zubaca dok na dodiru BD, sila se ne raspodeljuje jer je u sprezi samo jedan par. Ako je spregnuti par zupčanika sa razlikom u koraku, na jednom delu dvoparne sprege (npr. AB) opterećenje se povećava, a na drugom delu (DE) se smanjuje. Kod velikih razlika u koraku u odnosu na deformacije zubaca, opterećenje na delu dodira DE može se smanjiti do nule. U tom slučaju celokupnu silu  $F_n$  prenosi samo jedan par zubaca.

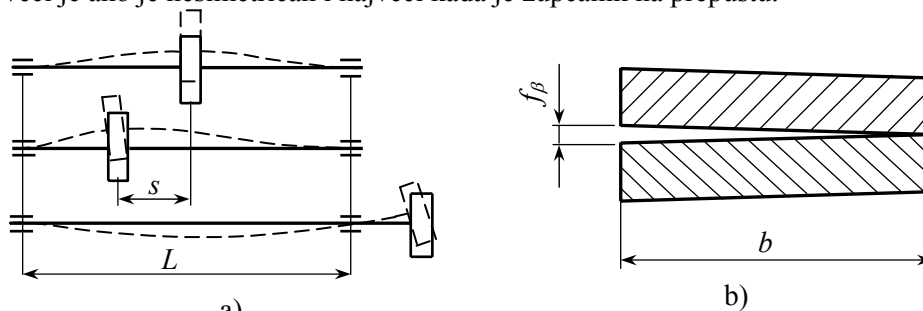


Raspodela opterećenja na parove zubaca u sprezi: a)  $\Delta p_b = 0$ , b)  $\Delta p_b > 0$

Uticaj neravnomerne raspodele opterećenja na parove zubaca u sprezi obuhvata se faktorima  $K_{H\alpha}$  za napone na bokovima zubaca i sa  $K_{H\beta}$  za napone u podnožju zubaca.

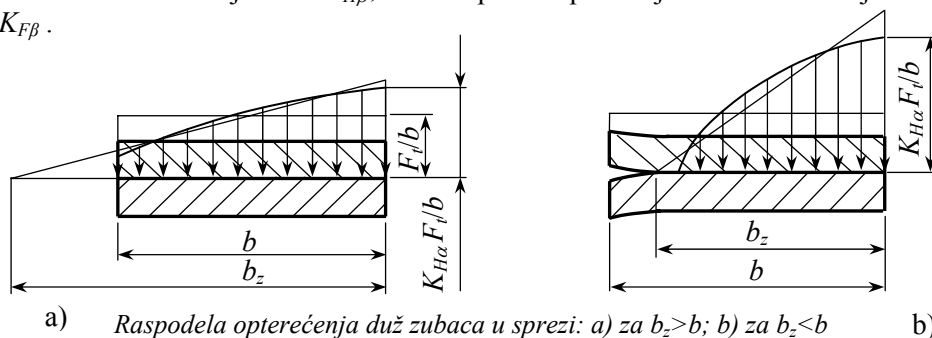
## 18. Raspodela opterećenja duž zubaca u sprezi

**Raspodela opterećenja duž zubaca u sprezi**, po pravilu je neravnomerna. Uzrok tome je odstupanje paralelnosti bočnih linija zubaca i nejednaka krutost u svim tačkama dodira. Odstupanje paralelnosti bočnih linija zubaca posledica je odstupanja pravca bočnih linija usled grešaka pri izradi zupčanika ( $f_{ma}$ ) i odstupanja pravca zubaca usled elastičnih deformacija vratila i zupčanika ( $f_{sh}$ ). Habanjem (razradom) zupčanog para, odstupanje paralelnosti se smanjuje ( $y_\beta$ ). Ukupno efektivno odstupanje paralelnosti bočnih linija  $f_\beta = |f_{ma} + f_{sh}| - y_\beta$ . Uticaj grešaka pri izradi  $f_{ma}$  zavisi od tolerancije pravca bočnih linija zubaca  $T_\beta$ . Uticaj deformacija vratila i zupčanika  $f_{sh}$  zavisi od položaja zupčanika na vratilu i od dimenzija vratila. Najmanji je u slučaju kada je zupčanik na sredini vratila, veći je ako je nesimetričan i najveći kada je zupčanik na prepustu.



Odstupanje paralelnosti bočnih linija zubaca: a) uticaj deformacija vratila, b) odstupanje paralelnosti zubaca u neopterećenom stanju

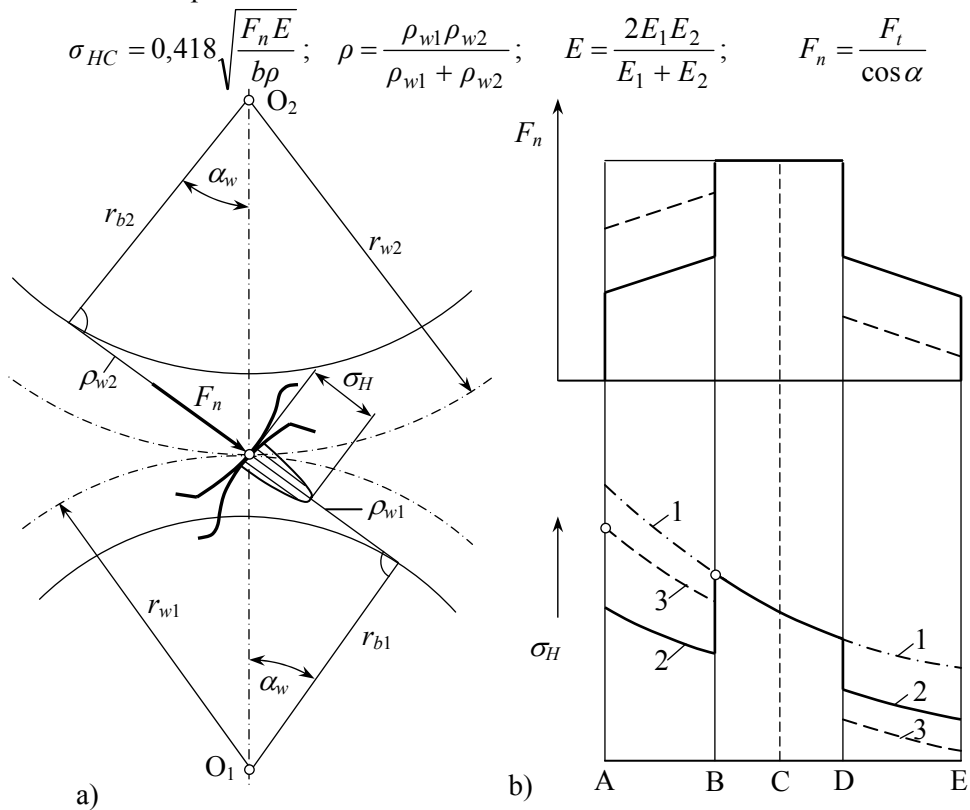
Moguće su dve varijante raspodele opterećenja duž bokova zubaca. U prvoj je odstupanje  $f_\beta$  malo u odnosu na veličinu opterećenja. Zupci se potpuno prilagode jedan drugom, a nošenje opterećenja ostvaruje se po celoj širini zupčanika. U drugoj varijanti odstupanje  $f_\beta$  je veliko u odnosu na jedinično opterećenje zupčanika. Opterećenje je koncentrisano na jednom kraju zupca. Uticaj neravnomerne raspodele opterećenja na napone na bokovima zubaca obuhvata se koeficijentom  $K_{H\beta}$ , a na napone u podnožju zubaca koeficijentom  $K_{F\beta}$ .



Raspodela opterećenja duž zubaca u sprezi: a) za  $b_z > b$ ; b) za  $b_z < b$

## 19. Nosivost bokova zubaca zupčanika: Radni napon, Kritični naponi i razaranje, Stepen sigurnosti.

**Radni napon** na bokovima zubaca je površinski pritisak u pravcu zajedničke normale na dodir - dodirnice. To je dodir ispupčenih površina – Hercov pritisak, koji se može predstaviti modelom dodira dva valjka. Pošto je radijus krivine evolvente promenljiv, kao početno stanje za proračun se koristi dodir u kinematskom polu – tačka C.

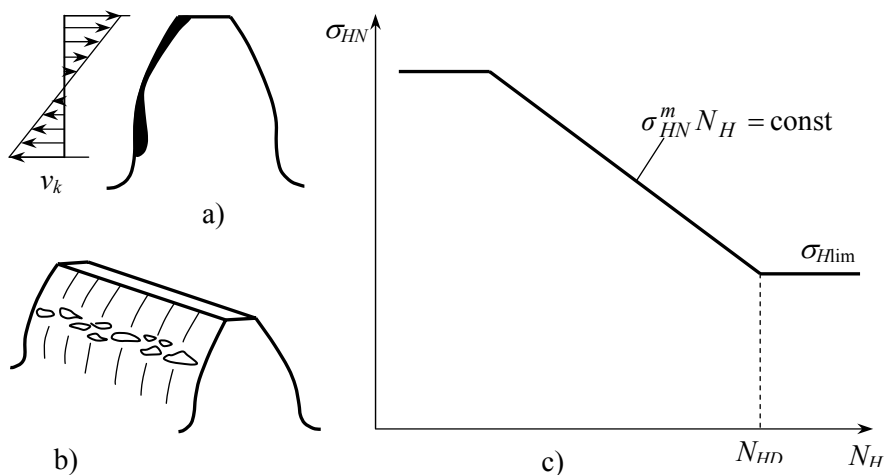


$$\sigma_H = Z_E Z_H Z_\epsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{b d_1} \frac{u+1}{u}} K_A K_v K_{H\alpha} K_{H\beta}$$

$Z_E$ -faktor elastičnosti materijala,  $Z_H$ -faktor oblika boka zupca,  $Z_\epsilon$ -faktor stepena sprezanja,  $Z_\beta$  -uticaj nagiba zubaca. Ako je  $K_{H\alpha}=1$  onda je  $\sigma_{HA} < \sigma_{HB}$ , a kada je  $K_{H\alpha} > 1$ , odnos je obrnut  $\sigma_{HA} > \sigma_{HB}$ . Za proračun je merodavan veći napon koji je definisan veličinom faktora uticaja neravnomerne raspodele opterećenja na parove zubaca u sprezi na veličinu kontaktnih napona -  $K_{H\alpha}$ .

## 20. Razaranja bokova zubaca i kritični naponi bokova

**Kritični napon** na bokovima zubaca je ona vrednost napona  $\sigma_H$  koja dovodi do razaranja u vidu trošenja površinskog sloja i do promene oblika profila bokova. Ovi tribološki procesi su složeni, a posledica su klizanja i kotrljanja zubaca uz dejstvo napona  $\sigma_H$ . Na delovima profila gde su brzine klizanja veće, skida se sloj materijala slično prikazu na slici. Ovaj se proces brže odvija kod bokova zubaca koji nisu površinski otvrdnuti (cementirani ili površinski kaljeni). Usled kotrljanja bokova zubaca dolazi do zamaranja površinskog sloja i do otpadanja manjih ili većih čestica. Ovo razaranje poznato pod nazivom "pitting" odvija se uglavnom oko sredine profila zupca. Uglavno je svojstveno površinski otvrdnutim bokovima koji su otporni na habanje koje često ometa razvoj pitinga.



*Razaranje i izdržljivost bokova zubaca*

Napon koji posle broja sprežanja zupca  $N_H$  dovede do razaranja je dinamička izdržljivost bokova  $\sigma_{HN}$ . Određuje se isključivo ispitivanjem zupčanika modela. *zupčani par model*. Prenosni odnos ovog modela je  $u=1$ , modul može biti  $m_n=3\ldots 5$  mm, osno rastojanje je oko 100 mm, obimna brzina je oko 10 m/s i podmazuju se uljem viskoznosti oko 100 mm<sup>2</sup>/s, na 50°C. Ispitivanje se ostvaruje na uređaju koji je takodje standardizovan

$$u=1, m_n=3\ldots 5\text{mm}, a=100\text{mm}, v=10\text{m/s}, v_{50}=100\text{ mm}^2/\text{s},$$

Kritični napon bokova zubaca za uslove rada u eksploataciji zupčanik

$$[\sigma_H] = \sigma_{Hlim} Z_L Z_v Z_R Z_W Z_X$$

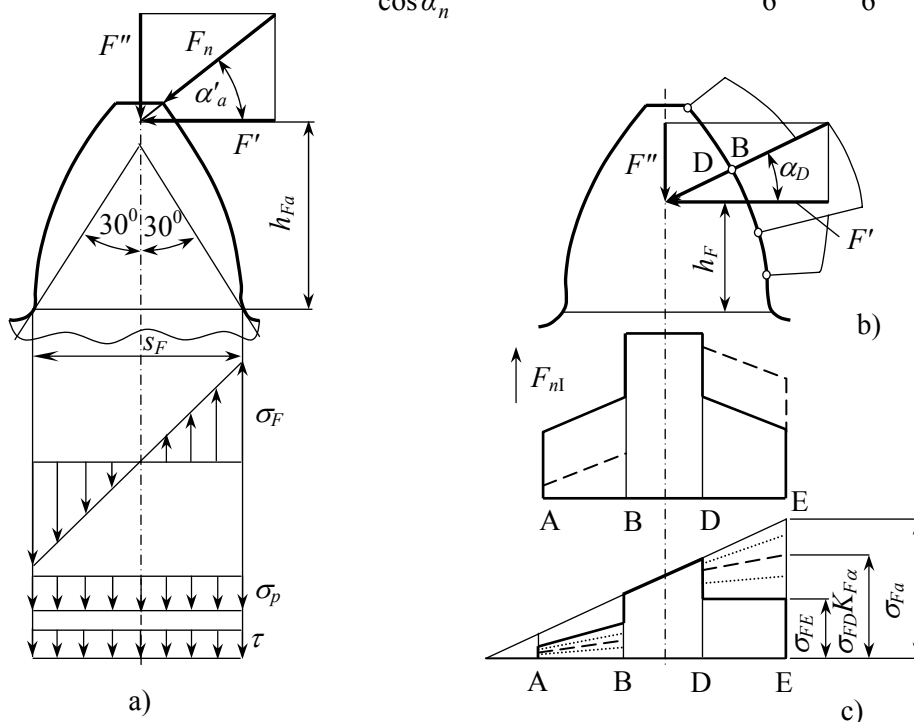
$Z_L$ -faktor ulja,  $Z_v$ -faktor brzine klizanja,  $Z_R$ -faktor razlike u hrapavosti,  $Z_W$ -faktor razlike u tvrdoći bokova,  $Z_X$ -faktor uticaja razlike u veličini zupca

## 21. Naponi u podnožju zubaca

**Radni napon** u podnožju zupca je složen od savijanja, pritiska i smicanja. Najveći je napon usled savijanja i on je merodavan za proračun. Uticaj ostalih se obuhvata posredstvom faktora koncentracije napona. Najveći napon je u preseku čiji je položaj određen posredstvom tangenti pod uglom od  $30^\circ$ .

$$\sigma_{Fa} = \frac{M}{W} = \frac{F_t}{bm_n} \frac{6f_h \cos \alpha'_a}{f_s^2 \cos \alpha_n} = Y_{Fa} Y_{sa} \frac{F_t}{bm_n}; \quad F_t = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2}$$

$$M = F' h_{Fa} = F_n \cos \alpha'_a \cdot h_{Fa} = \frac{F_t}{\cos \alpha_n} \cos \alpha'_a f_h m_n; \quad W = \frac{bs_F^2}{6} = \frac{bf_s^2 m_n^2}{6}$$



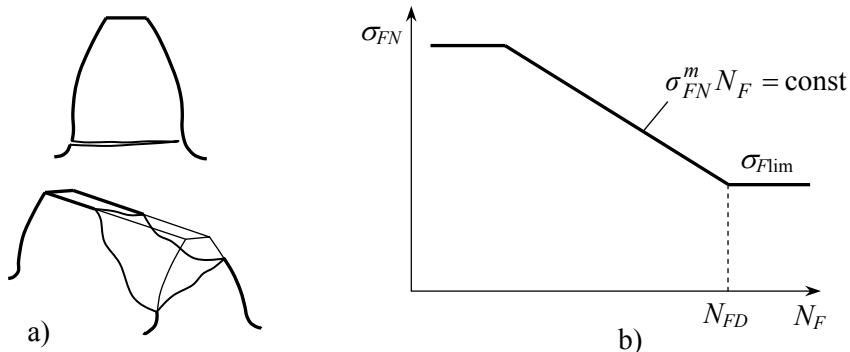
$$\sigma_F = Y_{Fa} Y_{sa} Y_\varepsilon Y_\beta \frac{F_t}{bm_n} K_A K_v K_{Fa} K_{F\beta}$$

$Y_{Fa}$ -faktor oblika zupca,  $Y_{sa}$ -faktor koncentracije napona,  $Y_\varepsilon$  - faktor kraka sile,  $Y_\beta$ -faktor uticaja nagiba zubaca. Kada je  $K_{Fa}=1$  ( $\sigma_{FD} > \sigma_{FE}$ ). Pri većim razlikama u koraku, napon pri dodiru u tački E se dovoljno poveća tako da postane veći od napona pri dodiru u tački D ( $\sigma_{FE} > \sigma_{FD}$ ) tj.  $\sigma_{FE} = K_{Fa} \sigma_{FD}$ , pri čemu je  $K_{Fa} > 1$ . Vrednost faktora  $K_{Fa} \geq 1$  pokazuje pri kojem dodiru je napon najveći, u tački D ili E. Pritom napon ne može biti veći od  $\sigma_{Fa}$  kada je u sprezi samo jedan par zubaca.

## 22. Lomovi zubaca zupčanika. Kritični naponi podnožja zubaca

**Kritični napon** u podnožju zubaca dovodi do odlamanja zubaca u celini ili u delovima. Lomovi su posledica zamaranja, odnosno širenja prslina u zoni najvećeg napona ili na mestima eventualnih defekata. Numeričke vrednosti kritičnog napona za podnožje zubaca određuju se ispitivanjem zupčanika modela istih karakteristika kao i za ispitivanje kritičnih napona bokova zubaca. (modul  $m_n=3\ldots 5$  mm,  $a=100$  mm,  $u=1$ , visina neravnina - hrapavost u podnožju je  $R_z=10\mu\text{m}$ , faktor koncentracije napona  $Y_{ST}=2$ ). Ispitivanjem se dobija trajna dinamička izdržljivost  $\sigma_{F\text{lim}}$ , granični broj ciklusa  $N_{FD}$  i eksponent krive izdržljivosti  $m$ . Za druge zupčanike i za radne uslove koji se razlikuju od eksperimentalnih, kritični napon u podnožju zubaca je

$$[\sigma_F] = \sigma_{F\text{lim}} Y_{ST} Y_{RT} Y_{\delta R} Y_X Y_N Y_\sigma$$



Trajna dinamička izdržljivost  $\sigma_{F\text{lim}}$  dobijena ispitivanjem zupčanika modela uzima se iz tablice 8.11, a zatim se množi faktorom koncentracije napona u podnožju zubaca zupčanika modela  $Y_{ST}=2$ . Vrednost  $[\sigma_F] = \sigma_{F\text{lim}} Y_{ST}$  može biti i konačna, kod približnijih proračuna. Faktor uticaja razlike u hrapavosti površine u podnožju zubaca  $Y_{RT}$ , faktor razlike u osetljivosti na koncentraciju napona  $Y_{\delta R}$  i razlike u veličini zubaca  $Y_X$ , faktor vremenske izdržljivosti  $Y_N \geq 1$ , koji se koristi u slučaju kada je broj promena napona u radnom veku  $n_s < N_{FD}$ . Faktor radne izdržljivosti koristi se ( $Y_\sigma \geq 1$ ) kada je tokom eksploatacije opterećenje (napon) uglavnom manji od izračunatog  $\sigma_F$ .

**Stepen sigurnosti** protiv loma zubaca je odnos kritičnog i radnog napona u podnožju zubaca

$$S_{F1} = \frac{[\sigma_F]_1}{\sigma_{F1}}; \quad S_{F2} = \frac{[\sigma_F]_2}{\sigma_{F2}}$$

Dobijene vrednosti treba da su veće od 1,25...2,5 zavisno od pouzdanosti podataka korišćenih u proračunu.

### 23. Parametri zupčanika, dimenzije, materijali, oblici

**Parametri ozubljenja** se uskladjuju sa uslovima rada zupčanika.  $u = 1 \dots 4$  (7),  $z_1 = 17 \dots 25$ . Pomeranje profila zubaca je obavezno ako je broj zubaca  $z < 17$ , ( $x > x_{\min}$ ). Osim toga za  $z < 30$ ,  $x = 0,03(30 - z)$ . Ugao nagiba zubaca  $\beta$  bira se tako da se obezbede pozitivna svojstva kosozubih zupčanika s tim da se u velikoj meri ne uveća aksijalna sila. Za prvi stepen prenosa,  $\beta = 10^\circ \dots 15^\circ$ . Za drugi stepen prenosa  $\beta = 8^\circ \dots 12^\circ$ , za treći  $6^\circ \dots 8^\circ$  itd. Za zupčanike sa strelastim zupcima  $\beta = 20^\circ \dots 30^\circ$

**Materijal zupčanika** svojim karakteristikama treba da obezbedi dovoljnu otpornost zubaca, prvenstveno u odnosu na razaranje bokova. Veća otpornost na razaranje, obezbedjuje manji gabarit zupčanika za isto opterećenje. Pogodno je da se zupčaniци izrađuju od čelika za termičku obradu i da se nakon izrade ozubljenja, zupci termički obrade otvrdnjavanjem površinskog sloja. Vek termički neobrađenih zupčanika je ograničen, a odnos gabarita i opterećenja koje mogu da prenesu je nepovoljan. Najmanji gabarit se postiže ako su zupčaniци od čelika za *cementaciju*. Posle cementacije mora da usledi brušenje bokova zubaca kako bi se otklonile relativno velike deformacije koje nastaju usled zagrevanja pri cementaciji. Brušenje čini zupčanike skupljim, ali je izdržljivost bokova odnosno radni vek značajno uvećan. Obično se cementiraju zupčaniци manjih dimenzija jer su pogodniji za smeštaj u peć za cementaciju. Zupčaniци većih dimenzija i većih modula pogodniji su za *površinsko kalenje* bokova. Otvrdnjavanje bokova zubaca vrši se još i *nitriranjem*. Zupčaniци mogu biti i *bez površinskog otvrdnjavanja*. Za tu svrhu se koriste čelici za poboljšanje ugljenični i legirani, konstrukcioni čelici i materijali za livenje: čelični liv, nodularni liv, temper liv, a ponekad i liveno gvoždje. Usled male otpornosti bokova na površinsko razaranje, ovi su zupčaniци manje nosivosti odnosno većih su dimenzija. **Stepen tolerancije** mora biti uskladjen sa materijalom i načinom površinske i termičke obrade zubaca.

**Dimenzije zupčanika** se određuju polazeći od napona na bokovima zubaca i međusobnim uskladjivanjem parametara ozubljenja, stanja u sprezi zupčanika i nosivosti zubaca.

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{2T_1}{\varphi \sigma_{Hdoz}^2} \frac{u+1}{u} KZ^2}$$

**Oblici tela** zupčanika zavise od veličine zupčanika, od tehnoloških uslova izrade, od vrste materijala itd. Ako je prečnik ozubljenja blizak prečniku vratila, ozubljenje se izrađuje neposredno na vratilu. Zupčanik i vratilo su iz jednog dela, a materijal se bira prema ograničenjima koja su merodavna za zupčanik. Tela zupčanika mogu biti u obliku ravne ploče (diska), ili složene konfiguracije u skladu sa priloženim uputstvima za konstruisanje.